Betrachtungen zum Schärfeverlauf bei gleichem Abbildungsmaßstab und verschiedenen Brennweiten*

Daniel Kirsten
www.drphotgraph.de
daniel@drphotgraph.de

30. Mai 2020

Vorwort

Ich habe den Text sorgfältig nach besten Wissen erstellt, allerdings gebe ich keine Garantie für die Richtigkeit der Informationen.

Da sich die mathematischen Hintergründe des Fotografierens seit weit über 100 Jahren entwickeln, gehe ich davon aus, dass die Informationen in diesem Artikel lange bekannt und an zahlreichen Stellen in ähnlicher Form veröffentlicht sind.

Jegliche Hinweise und Ratschläge nehme ich dankbar entgegen.

Dieser Artikel darf in unveränderter Form kopiert und weitergegeben werden. Es ist jedoch nicht gestattet, diesen Artikel in Webseiten einzubinden oder als Download anzubieten.

Die Diagramme wurden mit Gnuplot (www.gnuplot.info) erstellt.

Einführung

Als Fotograf mit mathematischen Hintergrund habe ich mich natürlich auch eingehend mit Schärfetheorie beschäftigt. Im Internet findet man hierzu eine Flut von Informationen, die sich grob in zwei Kategorien unterteilen lässt.

Zum einen gibt es zahlreiche Programme, bei denen man Werte wie z.B. Brennweite und Blendenzahl in ein Formular einträgt, woraus man dann den Schärfebereich und allerlei nützliche Dinge berechnet bekommt. Solche Programme tragen trotz ihres Nutzens nur wenig zum tieferen Verständnis bei.

Zum anderen findet man Lehrfilme und Tutorien, in denen das Thema unter Vermeidung der verhassten Mathematik mit Händen und Füßen erklärt wird. Dies führt meiner Meinung nach auch nicht zu einem tieferen Verständnis.

Vor allem hinsichtlich einer Fragestellung fand ich das Informationsangebot recht unbefriedigend. Stellen wir uns folgende Situation vor: Wir fotografieren einen aufrecht stehenden Menschen mit einer Brennweite von 100mm und einer Blendenzahl von 4. Der Mensch ist 180cm groß und wir wollen ihn im Hochformat mit der Vollformatkamera abbilden. Wir wollen davon ausgehen, dass das Bild des Menschen auf dem Kamerasensor 30mm groß ist, d.h. der Abbildungsmaßstab ist $\frac{1}{60}$ oder anders ausgedrückt 1 zu 60.

Nun wollen wir den gleichen Menschen mit anderen Brennweiten, z.B. 50mm oder 200mm, fotografieren. Dabei nutzen wir wiederum die Vollformatkamera im Hochformat, ändern jedoch die Entfernung zum Motiv so, dass der Mensch in der gleichen Größe abgebildet wird. Somit haben wir wiederum einen Abbildungsmaßstab von 1 zu 60.

Welche Blendenzahl muss ich bei den anderen Brennweiten verwenden, damit ich im Unendlichen die gleiche Unschärfe wie bei dem 100mm-Objektiv habe? Welche Auswirkungen ergeben sich dann für den gesamten Schärfeverlauf? Bei welchem Objektiv nimmt die Unschärfe vor oder hinter dem Motiv am schnellsten zu?

Ich betrachte hier nur die Unschärfe durch die Zerstreuungskreise, weitere Effekte, wie z.B. Lichtbeugung berücksichtige ich nicht.

Mathematische Untersuchung

Ein Punkt, der sich bei der Aufnahme eines Fotos nicht in der Schärfenebene befindet, wird auf dem Sensor als kreisförmiger Fleck (Zerstreuungskreis), abgebildet. Die Größe dieser Zerstreuungskreise hängt von verschiedenen Faktoren ab und bestimmt maßgeblich die Unschärfe im aufgenommenen Foto.

Aus der Linsengleichung und dem Strahlensatz lässt sich folgende Formel zur Berechnung des Durchmessers des Zerstreuungskreises eines Punktes herleiten:

$$\mathrm{Z}(f,k,d,x) = \frac{f}{k} \cdot \frac{f \cdot x}{(d-f) \cdot (d+x)} \tag{1}$$

Dabei sind:

- f die Brennweite des verwendeten Objektivs,
- k die Blendenzahl,
- d die Gegenstandsweite und
- x die Entfernung des Punktes von der Schärfenebene aus gemessen.

Die *Gegenstandsweite* ist die Entfernung der Schärfenebene von der Linse aus. An der Skala des Objektivs wird üblicherweise die Entfernung vom Sensor zur Schärfenebene angegeben.

Der Bruch $\frac{f}{k}$ in (1) ist der Durchmesser der Blende.

Wenn wir ein 85mm-Objektiv nutzen, eine Blende von 2 einstellen und auf eine Entfernung von 3 Metern fokussieren, dann wird ein Punkt, der 25cm hinter der Schärfenebene liegt, zu einem

Zerstreuungskreis mit dem Durchmesser

$$Z(85\text{mm}, 2, 3000\text{mm}, 250\text{mm}) = \frac{85\text{mm}}{2} \frac{85\text{mm} \cdot 250\text{mm}}{(3000\text{mm} - 85\text{mm}) \cdot (3000\text{mm} + 250\text{mm})} \approx 0{,}0953\text{mm}$$

abgebildet.

Gleichung (1) ist für unsere Zwecke allerdings etwas ungünstig, da wir ein und dasselbe Motiv mit verschiedenen Brennweiten, aber dem gleichen Abbildungsmaßstab fotografieren wollen. Wenn wir mit einer Brennweite f und einen Abbildungsmaßstab m fotografieren möchten, dann muss die Gegenstandsweite

$$d = (1 + \frac{1}{m}) \cdot f \tag{2}$$

betragen. Den Wert $1 + \frac{1}{m}$ kann man sich gut veranschaulichen: Wenn wir mit einem Abbildungsmaßstab von $m = \frac{1}{60}$ fotografieren, dann ist $1 + \frac{1}{m}$ gleich 61, oder allgemeiner, wenn der Abbildungsmaßstab 1 zu irgendwas ist, dann beträgt $1 + \frac{1}{m}$ irgendwas plus 1.

Wir setzen jetzt $\text{ZM}(f, k, m, x) = \text{Z}(f, k, (1 + \frac{1}{m}) \cdot f, x)$ und erhalten:

$$\text{ZM}(f, k, m, x) = \frac{f \cdot m}{k} \cdot \frac{x}{(1 + \frac{1}{m}) \cdot f + x}. \tag{3}$$

Jetzt haben wir eine Formel, mit der wir den Durchmesser des Zerstreuungskreises aus der Brennweite, der Blendenzahl, dem Abbildungsmaßstab, und der Entfernung von der Schärfenebene berechnen können.

Scharfsinnige Beobachter haben sicher gemerkt, dass die Gegenstandsweite d in Gestalt von $(1 + \frac{1}{m}) \cdot f$ in (3) enthalten ist.

Für $x > 0$, also für Punkte hinter der Schärfenebene, liefert (3) positive Werte größer als 0.

Für $x = 0$, also für Punkte in der Schärfenebene, liefert (3) den Wert 0. Das ist vernünftig, Punkte in der Schärfenebene werden als Punkt abgebildet, der Durchmesser des Zerstreuungskreises ist 0mm.

Für $-(1 + \frac{1}{m}) \cdot f < x < 0$, also für Punkte zwischen Schärfenebene und Objektiv, liefert (3) negative Werte. Das liegt daran, dass die Blende praktisch auf den Kopf gestellt abgebildet wird. Der Durchmesser des Zerstreuungskreises ist dann der Betrag des Wertes von (3).

Für $x = -(1 + \frac{1}{m}) \cdot f$ müssen wir in (3) etwas machen, was Mathematiker nur ungern tun: wir müssen durch 0 teilen. Bei $x = -(1 + \frac{1}{m}) \cdot f$ liegt der abzubildende Punkt genau um die Gegenstandsweite vor der Schärfenebene. Somit liegt der Punkt mitten in der Linse, d.h. er wird gar nicht abgebildet und es ist verständlich, dass (3) wegen Nullteilung nicht definiert ist.

Für $x < -(1 + \frac{1}{m}) \cdot f$ liefert (3) positive Werte, die aber keine praktische Bedeutung haben, da die abzubildenden Punkte auf der Sensorseite der Linse liegen.

Betrachten wir nun unser obiges Beispiel: Wir fotografieren einen Menschen mit einer Brennweite von 100mm, einer Blende 4 und einem Abbildungsmaßstab von 1 zu 60. Ein Punkt, der sich 90cm vor der Schärfenebene befindet, wird zu einem Zerstreuungskreis mit einem Durchmesser von

$$\text{ZM}(100\text{mm}, 4, \frac{1}{60}, -900\text{mm}) = \frac{100\text{mm}}{4 \cdot 60} \cdot \frac{-900\text{mm}}{(1 + 60) \cdot 100\text{mm} - 900\text{mm}} \approx -0{,}0721\text{mm}$$

(also rund $0,0721$mm) abgebildet.

Was können wir nun über die Unschärfe im Unendlichen aussagen? Da der Wert $(1+\frac{1}{m})\cdot f$ in (3) nicht von x abhängt, erhalten wir:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{ZM}(f,k,m,x) = \frac{f\cdot m}{k}. \tag{4}$$

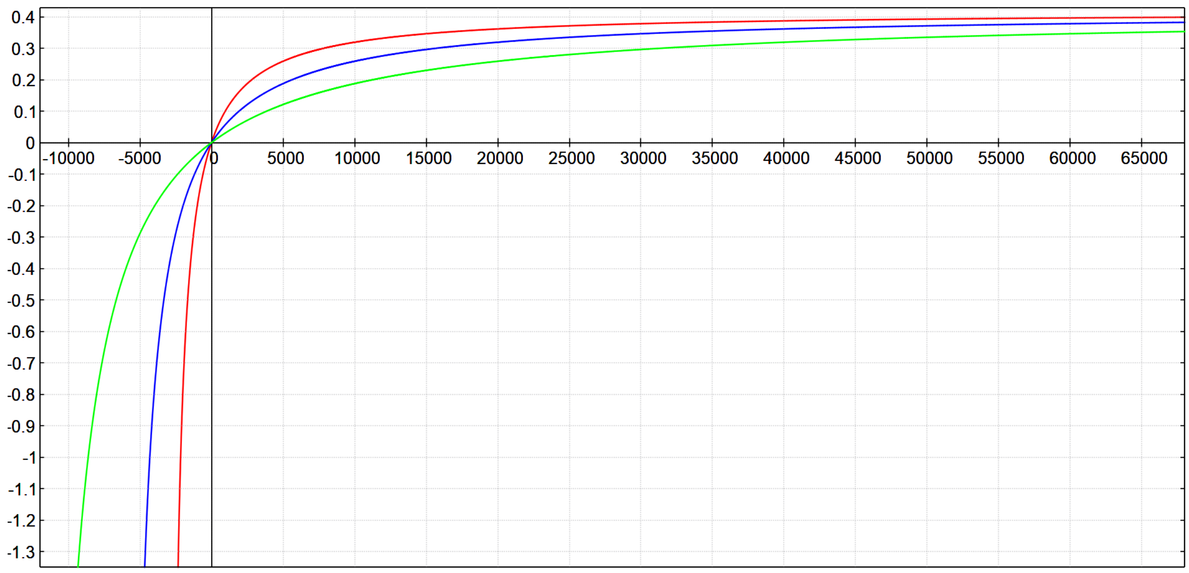
Der Wert $\frac{f\cdot m}{k}$ ist das Produkt aus dem Blendendurchmesser $\frac{f}{k}$ und dem Abbildungsmaßstab m.

Für weit entfernte Punkte ist also der Durchmesser des Zerstreuungskreises in etwa das Produkt aus dem Blendendurchmesser und dem Abbildungsmaßstab. Daher nennen wir den Wert $\frac{f\cdot m}{k}$ den *Durchmesser der Zerstreuungskreise im Unendlichen*.

Im obigen Beispiel mit einer Brennweite von 100mm, einer Blende 4 und einem Abbildungsmaßstab von 1 zu 60 werden weit entfernte Punkte als Kreis mit dem Durchmesser $\frac{100\text{mm}}{4\cdot 60}\approx 0,417$mm abgebildet.

Wenn wir nun das gleiche Motiv mit anderen Brennweiten, aber dem gleichen Abbildungsmaßstab (1 zu 60) fotografieren und die gleiche Unschärfe im Unendlichen haben möchten, dann müssen wir die Blendenzahl so anpassen, dass der Wert $\frac{f}{k}$ gleich bleibt. Somit muss ich bei einem 200mm-Objektiv die Blendenzahl 8, bei einem 50mm-Objektiv die Blendenzahl 2 einstellen, um Punkte im Unendlichen zu einem Zerstreuungskreis vom Durchmesser $0,417$mm abzubilden.

Das Diagramm zeigt die Werte von $\mathrm{ZM}(f,k,m,x)$ für diese 3 Fälle. Alle Maße sind in mm angegeben.



Die blaue Kurve stellt die Werte für das 100mm-Objektiv, also $\mathrm{ZM}(100\text{mm},4,\frac{1}{60},x)$ dar. Die rote Kurve stellt die Werte für das 50mm-Objektiv bei einer Blendenzahl 2 und die grüne Kurve die Werte für das 200mm-Objektiv bei einer Blendenzahl 8 dar.

Zunächst kann man deutlich erkennen, dass die Werte gegen $-\infty$ streben, wenn x in die Nähe der negativen Gegenstandsweite kommt. Das ist anschaulich klar: wenn ein Punkt fast die Gegenstandsweite vor dem Motiv[1] liegt, dann liegt der Punkt nahe der Linse und wird als großer Zerstreuungskreis abgebildet.

Es ist auch zu erkennen, dass sich die Kurven für große x-Werte einander annähern, schließlich streben sie im Unendlichen gegen den Grenzwert von rund $0,417$mm an.

Jetzt schauen wir uns an, was 5 Meter hinter dem Motiv passiert, d.h. wir betrachten die Werte der Kurven für $x = 5000$mm. Es lässt sich leicht Nachrechnen, dass die Kurven für das 50mm-, das 100mm-, bzw. das 200mm-Objektiv die Werte von rund $0,26$mm, $0,19$mm bzw. $0,12$mm haben. Somit macht das 50mm-Objektiv 5 Meter hinter dem Motiv mehr als doppelt so große Zerstreuungskreise als das 200mm-Objektiv.

Die Objektive bilden in den beschriebenen Situationen im Unendlichen mit der gleichen Unschärfe ab (gleichgroße Zerstreuungskreise). Trotzdem unterscheiden sich die Unschärfen der Objektive erheblich für Punkte 5 Meter hinter dem Motiv.

Die erheblichen Unterschiede in der Unschärfe verringern sich mit zunehmender Entfernung, 10 Kilometer hinter dem Motiv unterscheiden sich die Werte der Kurven erst in der 4. Nachkommastelle.

Man kann sich die Zunahme der Zerstreuungskreise hinter dem Motiv veranschaulichen. Der Faktor $\frac{f \cdot m}{k}$ in (3) ist in den drei untersuchten Situationen gleichgroß. Um die Zunahme der Zerstreuungskreise hinter dem Motiv besser zu verstehen, sollten wir uns den hinteren Faktor $\frac{x}{(1+\frac{1}{m}) \cdot f + x}$ in (3) anschauen. Wir schauen uns diesen Faktor für das 100mm-Objektiv an (Blende 4, Abbildungsmaßstab 1 zu 60). Dann gilt

$$\frac{x}{(1+\frac{1}{m}) \cdot f + x} = \frac{x}{(1+60) \cdot 100\text{mm} + x} = \frac{x}{6100\text{mm} + x}, \tag{5}$$

wobei 6100mm, wie oben bemerkt, gerade die Gegenstandsweite ist.

Wie groß ist (5), wenn wir einen Punkt betrachten, der 6100mm hinter dem Motiv ist, also wenn $x = 6100$mm ist? Man kann leicht nachrechnen, dass (5) gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Wie sieht es jetzt für einen Punkt aus, der genau die n-fache Gegenstandsweite hinter dem Motiv liegt, also wenn $x = n \cdot 6100$mm gilt? Dann können wir (5) vereinfachen:

$$\ldots = \frac{n \cdot 6100\text{mm}}{6100\text{mm} + n \cdot 6100\text{mm}} = \frac{n \cdot 6100\text{mm}}{(n+1) \cdot 6100\text{mm}} = \frac{n}{n+1}.$$

Wir erkennen: Für einen Punkt, der eine Gegenstandsweite hinter dem Motiv liegt, ist der Durchmesser des Zerstreuungskreises die Hälfte von $\frac{f \cdot m}{k}$. Für einen Punkt, der zwei Gegenstandsweiten hinter dem Motiv liegt, ist der Durchmesser $\frac{2}{3}$ von $\frac{f \cdot m}{k}$, und noch eine Gegenstandsweite weiter ist der Durchmesser $\frac{3}{4}$ von $\frac{f \cdot m}{k}$. In (4) haben wir aber erkannt, dass $\frac{f \cdot m}{k}$ gerade der Durchmesser der Zerstreuungskreise im Unendlichen ist.

> **Fazit:** Wenn sich ein Punkt die n-fache Gegenstandsweite hinter dem Motiv befindet, dann ist der Durchmesser des Zerstreuungskreises das $\frac{n}{n+1}$-fache des Durchmessers der Zerstreuungskreise im Unendlichen.

[1] Wir gehen davon aus, dass sich das Motiv in der Schärfenebene befindet. Somit können wir bei den Entfernungsangaben die Worte „Motiv“ und „Schärfenebene“ synonym verwenden.

Dies gilt für alle (nicht nur ganzzahlige) $n > 0$. Dies gilt darüber hinaus auch für $n = 0$, da $\frac{0}{1} = 0$ gilt, und der Durchmesser dann 0mm beträgt. Weiterhin gilt dies auch für $-1 < n < 0$, dann liegen die abzubildenden Punkte zwischen Objektiv und Motiv. Für $n = -1$ erhalten wir $\frac{n}{n+1} = \frac{-1}{0}$, was ja bekanntlich nicht definiert ist. Dies entspricht dem entarteten Fall, dass der abzubildende Punkt genau im Objektiv liegt. Für $n < -1$ machen die Betrachtungen keinen Sinn.

Nun schauen wir uns die Situation für das 200mm-Objektiv an (Blende 8, Abbildungsmaßstab 1 zu 60). Wiederum gilt: für Punkte, die eine Gegenstandsweite hinter dem Motiv liegen, ist der Durchmesser des Zerstreuungskreises die Hälfte von $\frac{f \cdot m}{k}$. Der Unterschied zum 100mm-Objektiv besteht darin, dass die Gegenstandsweite jetzt genau doppelt so groß, nämlich 12200mm ist. Somit habe ich bei dem 200mm-Objektiv erst 12200mm hinter dem Motiv die gleiche Unschärfe, die ich bei dem 100mm-Objektiv nach 6100mm habe. Allgemeiner gilt: Wenn ich bei dem 100mm-Objektiv bei einer bestimmten Entfernung vom Motiv eine gewisse Unschärfe habe, dann habe ich bei dem 200mm-Objektiv die gleiche Unschärfe erst nach der doppelten Entfernung. Analog habe ich bei dem 50mm-Objektiv (Blende 2, Abbildungsmaßstab 1 zu 60) die gleiche Unschärfe bereits bei der halben Entfernung.

Zusammenfassung

Ich nehme ein Foto mit einer Brennweite f, einer Blendenzahl k und einem Abbildungsmaßstab m auf. Nun möchte ich das gleiche Motiv mit einer anderen Brennweite, aber dem gleichen Abbildungsmaßstab aufnehmen. Nennen wir den Zoomfaktor α. Die Brennweite beim zweiten Foto sei also $\alpha \cdot f$.

Wenn ich bei dem zweiten Foto im Unendlichen die gleiche Unschärfe haben möchte, dann muss ich die Blendenzahl $\alpha \cdot k$ verwenden. Dies bedeutet, dass die Blende den gleichen Durchmesser haben muss. Die Zerstreuungskreise im Unendlichen sind dann bei beiden Fotos $\frac{f \cdot m}{k}$ groß.

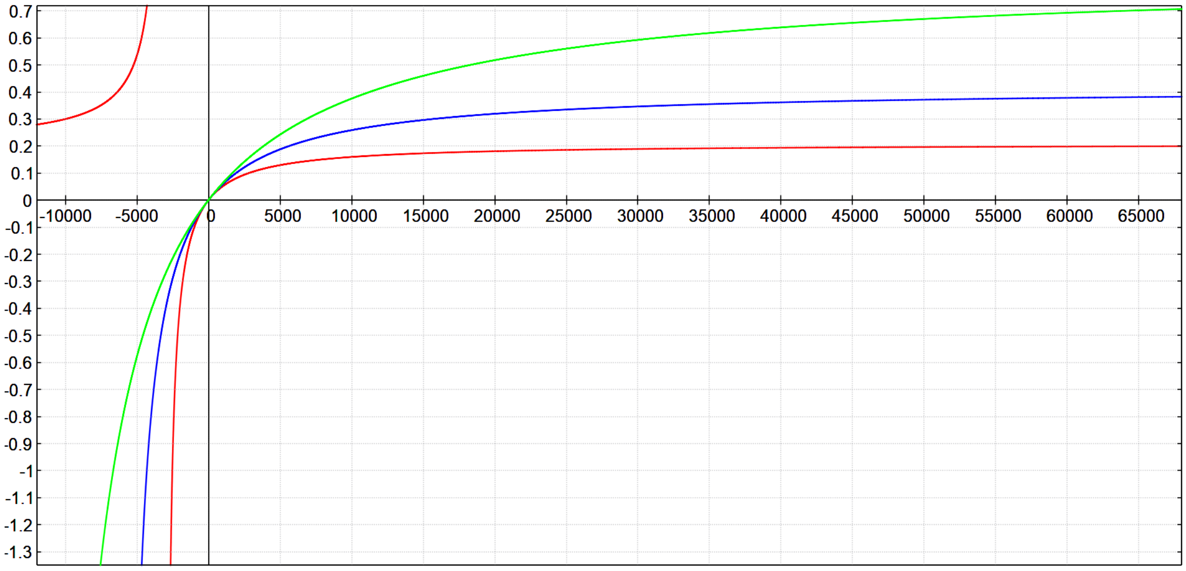
Wenn ich bei dem ersten Foto in einer Entfernung x vor oder hinter dem Motiv eine gewisse Unschärfe habe, dann habe ich bei dem zweiten Foto die gleiche Unschärfe nach einer Entfernung von $\alpha \cdot x$. Der Schärfenbereich ist bei dem zweiten Foto also um den Faktor α gestreckt.

Wenn ich für eine beliebige Zahl $n > -1$ einen Punkt betrachte, der sich die n-fache Gegenstandsweite hinter dem Motiv befindet, dann ist der Durchmesser des Zerstreuungskreises des Punktes genau das $\frac{n}{n+1}$-fache des Durchmessers der Zerstreuungskreise im Unendlichen.

Weitere Betrachtungen

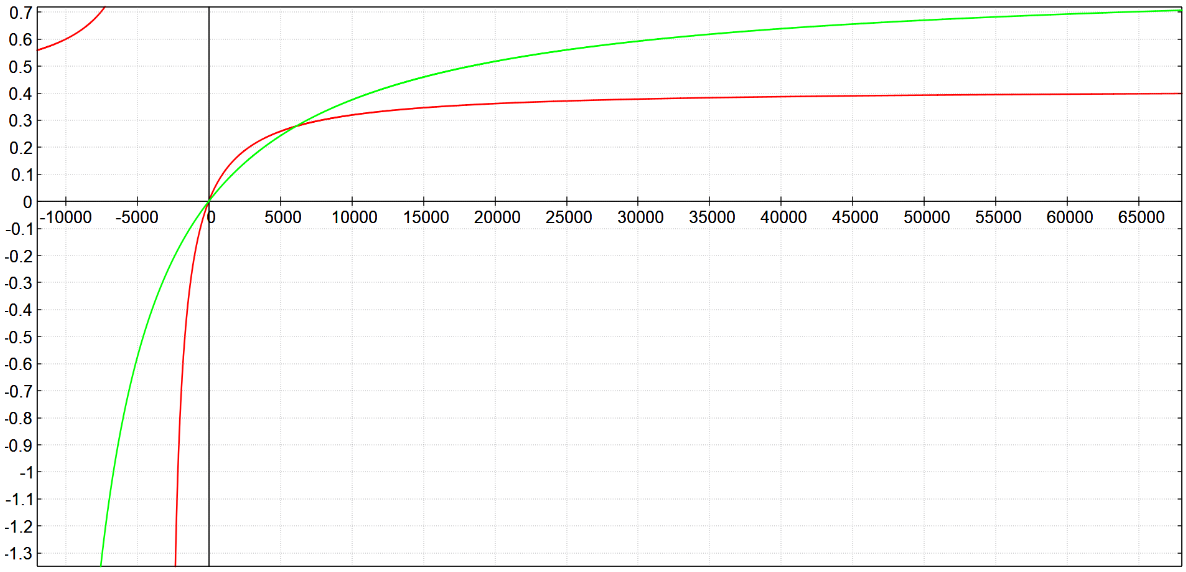
Da ich die Formeln in Gnuplot eingerichtet habe, bietet es sich an, weitere Situationen graphisch darzustellen. Jetzt fotografieren wir wieder im Abbildungsmaßstab von 1 zu 60 mit einem 50mm- (rot), 100mm- (blau) und einem 200mm-Objektiv (grün), jedoch verwenden wir jedesmal die Blendenzahl 4.

Erwartungsgemäß nähern sich die Kurven für wachsende x-Werte nicht an. Hinter dem Motiv



hat das 50mm-Objektiv die geringste, das 200mm-Objektiv die größte Unschärfe. Vor dem Motiv ist es jedoch genau umgekehrt.

Im letzten Diagramm vergleichen wir das 50mm-Objektiv mit Blende 2 (rot) und das 200mm-Objektiv mit Blende 4 (grün) wiederum bei einem Abbildungsmaßstab von 1 zu 60. Bei einer Entfernung von 6100mm hinter dem Motiv bilden beide Objektive gleich scharf ab, davor bildet das 200mm-Objektiv, dahinter das 50mm-Objektiv schärfer ab.



Skript für Gnuplot

Für experimentierfreudige Leser ist hier ein Skript für Gnuplot, welches das erste Diagramm ausgibt:

```
ZM(f,k,m,x) = (f * m/k) * x / ((1+1/m) * f + x )

set xrange [-12000:+68000]
set yrange [-1.35:+0.43]
set sample 10000

set xzeroaxis lt -1 lw 1.5
set yzeroaxis lt -1 lw 1.5
set xtics 5000
set xtics axis
set ytics 0.1
set ytics border offset 0,0
set tics font ",16"

set grid

unset x2tics
unset y2tics

set multiplot
plot ZM( 50, 2, 0.016666667, x)  notitle lc rgb "#FF0000" lw 2.5
plot ZM(100, 4, 0.016666667, x)  notitle lc rgb "#0000FF" lw 2.5
plot ZM(200, 8, 0.016666667, x)  notitle lc rgb "#00FF00" lw 2.5
```